Практическое занятие №1.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: **Операции над множествами. Метод математической индукции. Абсолютная величина.**

1) Определить множества $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\triangle B$, если

a) $A=\{x\in R: x^2+x-20=0\}$, $B=\{x\in R: x^2-7x+12=0\}$.

b) $A=\{x: -4<x<1\}$, $B=\{x: 0<x<4\}$;

c) $A=\{x: x^2-x-2>0\}$, $B=\{x: 6x-x^2\geqslant 0\}$

d) $A=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1\}$, $B=\{(x,y): |x|+|y|\leqslant 1\}$;

2) Найти $\sup A$, $\inf A$, если a) $A=\left\{\dfrac{n}{3n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, b) $A=\left\{\dfrac{3n^2}{2n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

3) Применяя метод математической индукции, доказать

$1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1.$ $\forall n$,

4) **Решить неравенства:**

a) $|x-2|\geqslant 10.$ b) $|2x-1|<|x-1|.$ c) $||x+1|-|x-1||<1.$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи из Лекции №1 (ФИТ)

Пример 1. *Доказать равенство* $(A\setminus B)'=A'\bigcup B$.

Пример 2. *Применяя метод математической индукции, доказать, что* $\forall n\in N$ *справедливо равенство:* $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Пример 3. *Применяя метод математической индукции, доказать, что* $\forall n\in N$ *справедливо равенство:* $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Пример 4. *Найти* $\sup A$, $\inf A$, *если* $A=\left\{\dfrac{2n-1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти точную верхнюю грань интервала $(0,1)$.

$\triangle$ Число 1 является верхней гранью интервала $(0,1)$, так как $\forall x\in(0,1)$: $x<1$. Более того, $\forall\tilde{x}<1$ $\exists a\in(0,1)$: $a>\tilde{x}$. Действительно, если $x\leqslant 0$, то $\forall a\in(0,1)$: $a>x$. Если $x>0$, то, как показано в примере 1 § 1, на интервале $(x,1)$ найдется рациональное число a такое, что $\tilde{x}<a<1$, т. е. $\exists a\in(0,1)$: $a>\tilde{x}$. Таким образом, для числа 1 выполнены оба условия определения точной верхней грани. Следовательно, $\sup(0,1)=1$. Заметим, что найденная точная грань не принадлежит интервалу $(0,1)$, т. е. $\sup(0,1)\notin(0,1)$, в то время как для промежутка $(0,1]$ $\sup(0,1]=1\in(0,1]$. ▲

6. Определить множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \triangle B$, если:

а) $A = \{x : 0 < x < 2\}$, $B = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 3\}$;

б) $A = \{x : x^2 - 3x < 0\}$, $B = \{x : x^2 - 4x + 3 \geqslant 0\}$;

в) $A = \{x : |x - 1| < 2\}$, $B = \{x : |x - 1| + |x - 2| < 3\}$.

◀ Пользуясь определениями объединения, пересечения, разности и симметрической разности множеств, находим:

а) $A \cup B = \{x : (0 < x < 2) \vee (1 \leqslant x \leqslant 3)\} = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$;

$A \cap B = \{x : (0 < x < 2) \wedge (1 \leqslant x \leqslant 3)\} = \{x : 1 \leqslant x < 2\}$;

$A \backslash B = \{x : (0 < x < 2) \wedge x \notin [1, 3]\} = \{x : 0 < x < 1\}$;

$B \backslash A = \{x : (1 \leqslant x \leqslant 3) \wedge x \notin]0, 2[\} = \{x : 2 \leqslant x \leqslant 3\}$;

$A \triangle B = \{x : (A \backslash B) \cup (B \backslash A)\} = \{x : (0 < x < 1) \vee (2 \leqslant x \leqslant 3)\}$.

б) Поскольку $x^2 - 3x < 0$ для $0 < x < 3$, то $A = \{x : 0 < x < 3\}$. Неравенство $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$ справедливо для $-\infty < x \leqslant 1$ и $3 \leqslant x < +\infty$. Обозначим $D = \{x : -\infty < x \leqslant 1\}$, $E = \{x : 3 \leqslant x < +\infty\}$, тогда $B = D \cup E$. Используя свойства операций над множествами, находим:

$$A \cup B = A \cup (D \cup E) = A \cup D \cup E = \{x : (0 < x < 3) \vee \vee (-\infty < x \leqslant 1) \vee (3 \leqslant x < +\infty)\} = \{x : -\infty < x < +\infty\};$$

$$A \cap B = A \cap (D \cup E) = (A \cap D) \cup (A \cap E) = \{x : (0 < x \leqslant 1) \vee x \in \varnothing\} = \{x : 0 < x \leqslant 1\};$$

$$A \backslash B = A \backslash (D \cup E) = \{x : x \in A \wedge (x \notin D \vee x \notin E)\} = \\ = \{x : (x \in A \wedge x \in D) \vee (x \in A \wedge x \in E)\} = (A \backslash D) \cup (A \backslash E) = \{x : 1 < x < 3\};$$

$$B \backslash A = (D \cup E) \backslash A = \{x : (x \in D \vee x \in E) \wedge x \notin A\} = \\ = \{x : (x \in D \wedge x \notin A) \vee (x \in E \wedge x \notin A)\} = (D \backslash A) \cup (E \backslash A) = \\ = \{x : (-\infty < x < 0) \vee (3 \leqslant x < +\infty)\};$$

$$A \triangle B = A \triangle (D \cup E) = (A \backslash (D \cup E)) \cup ((D \cup E) \backslash A) = \\ = \{x : (1 < x < 3) \vee (-\infty < x \leqslant 0) \vee (3 \leqslant x < +\infty)\} = \\ = \{x : (-\infty < x \leqslant 0) \vee (1 < x < +\infty)\}.$$

в) Запишем явное выражение для множества $A = \{x : -2 < x - 1 < 2\} = \{x : -1 < x < 3\}$. Затем, решая неравенство $|x - 1| + |x - 2| < 3$, находим явное выражение для множества $B = \{x : 0 < x < 3\}$. Тогда

$$A \cup B = \{x : (-1 < x < 3) \vee (0 < x < 3)\} = \{x : -1 < x < 3\};$$

$$A \cap B = \{x : (-1 < x < 3) \wedge (0 < x < 3)\} = \{x : 0 < x < 3\};$$

$$A \backslash B = \{x : (-1 < x < 3) \wedge x \notin]0, 3[\} = \{x : -1 < x \leqslant 0\};$$

$$B \backslash A = \{x : (0 < x < 3) \wedge x \notin]-1, 3[\} = \varnothing;$$

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = A \backslash B = \{x : -1 < x \leqslant 0\}. \ ▶$$

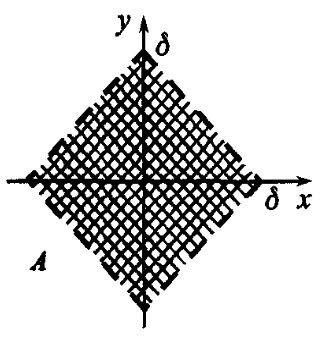

Рис. 7

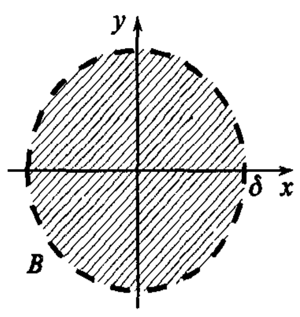

Рис. 8

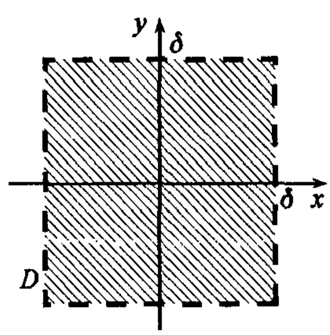

Рис. 9

40. Доказать, что если $x > -1$, то справедливо неравенство

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \qquad n > 1,$$

причем знак равенства имеет место лишь при $x = 0$.

◀ Требуемое неравенство непосредственно следует из предыдущего примера, если положить там $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$. Если $x = 0$, то $\forall n > 1$ имеем знак равенства. Покажем, что при $n > 1$ и $x > -1$ получим строгое неравенство $(1+x)^n > 1+nx$. При $n = 2$ это очевидно: $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$. Далее, если $(1+x)^n > 1+nx$, то

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 > 1+(n+1)x. \ ▶$$

44в) Доказать неравенство $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Доказательство неравенства в) проведем с помощью метода математической индукции. При $n = 1$ неравенство очевидно. Предполагая его справедливым при n, покажем, что оно справедливо и при $n+1$. В самом деле,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\cdot\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\sqrt{\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}. \ ▶$$

45. $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, $n \geqslant 2$.

◀ При $n \geqslant 2$ имеем

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}. \ ▶$$